ЦЕНТРЫ КУБИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ИНВАРИАНТНОЙ КУБИКОЙ

Л.В. Детченя[1], **А.П. Садовский**[2], **Т.В. Щеглова**[2]

[1] Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь
detchenya_lv@mail.ru
[2] Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
sadovskii@bsu.by, shcheglovskaya@tut.by

Рассматривается система

$$\dot{x} = y(1 + Dx + Px^2) + Hx^2 + Qx^3 + y(G + Vx),$$
$$\dot{y} = -x + Ax^2 + 3Bxy + Cy^2 + Kx^3 + 3Lx^2y + Mxy^2 + Ny^3, \qquad (1)$$

где $A, B, C, K, L, M, N, D, P, H, Q, G, V \in \mathbb{C}$.

Введем вектор $p = (A, B, C, K, L, M, N, D, P, H, Q, G, V, W, E, F, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5)$.

Теорема 1. *При* $p \in \mathbb{V}(I_1)$, *где*

$$I_1 = \langle E(F(F-DG)-G^2(M-3P))+(2d_2G^2-3F(E+2F))W, E(F^2(F-DG)-FG^2(3M-7P))+$$
$$+3(2d_3G^3-F^2(E+2F))W, EG+d_4W, EF+d_5W, (3F^3(4DG-3F)-3F^2G^2(D^2-4GH)+$$
$$+E(2F^2(DG-F)+2FG^2(M-3P))+6F^2G^2(M-3P)+3G^4(M-3P)^2W-(2F^2(E+3F)+$$
$$+6FG^2(M-3P))W^2-F^2(4EG^4-3W^3), (3F^3(3F-4DG)+E(2F^2(F-DG)+2FG^2(M-P))+$$
$$+3F^2G^2(D^2+4M-6P)+3G^4(M-3P)(M-P)-6FG^3(D(M-2P)-2GQ))W+$$
$$+(2F^2(3DG-E-6F)-6FG^2(M-2P))W^2-F^2(4EG^4-3W^3), 12EF^2G^4(2F+AG)+$$
$$+(18F^4(4DG-3F)-18F^3G^2(D^2+M)+E^2(2F^2(DG-F)+2FG^2(M-3P))+18DF^2G^3(M-2P)-$$
$$-18FG^4(M-3P)P+E(3F^3(8DG-7F)+3G^4(M-3P)^2-3F^2G^2(D^2-2M+10P)))W+$$
$$+(2F^2(9F^2-E^2-9DFG)-6E(F^3+FG^2(M-3P))+18F^2G^2P)W^2+EF^2(8EG^4+3W^3), E^2G^4-$$
$$-E(F(F-DG)+G^2(3BG-M+3P))W-(E^2+3F(F-DG)+E(3F-DG)+3G^2P)W^2, 18F^2\times$$
$$\times(F^2-DFG+G^2P)W^2(F(DG+W)-3F^2-G^2(M-3P))+2E^2F(F^4W+G^4(M-3P)^2W-$$
$$-F^3(G^4+2DGW+3W^2)+F^2G(DG^4+G(D^2+3G^2-2M+6P)W+3DW^2)+FG^2(G^4(M-3P)+$$
$$+2DG(M-3P)W-(M+P)W^2))+3EW(3F^6+G^6(M-3P)^3-7F^5(DG+2W)+FG^4(M-3P)\times$$
$$\times(DG(M-3P)+2(P-M)W)+F^4(G^2(5D^2+4G^2-5M+15P)+18DGW+3W^2)+F^3G\times$$
$$\times(DG^2(6M-D^2-18P)-4G(D^2+M+P)W-3DW^2)+F^2G^2(4G^4K+G^2(M-3P)(M-D^2-3P)+$$
$$+2DG(M-P)W+(M+P)W^2)), 18F^2(F^2-DFG+G^2P)W^2+E^2F(F^2W+G^2(5M-9P)W+$$
$$+F(W^2-4G^4-DGW))+3EW(2F^4+G^4M(M-3P)+F^3(W-2DG)+FG^2(6G^2L-5DGM+$$
$$+12DGP-2MW+7PW)+F^2(7G^2(M-2P)-DGW+W^2)), N-2F, CG-d_1G+V-W, E-d_1G+$$
$$+3V, F-V, 1-tWFE\rangle \bigcap \mathbb{C}[A,B,C,K,L,M,N,D,P,H,Q,G,V,W,E,F],$$

система (1) *имеет инвариантную кубику вида* $f(x,y)=0$, *где*

$$f(x,y) = 1 + d_1x + d_2x^2 + d_3x^3 + (d_4 + d_5x)y.$$

Теорема 2. *При* $p \in \mathbb{V}(J_1)$, *где*

$$J_1 = I_1 + \langle (C-3D)(3C-2D)^2(2C+D)G^2 + 196(2C+D)^2G^4 + (49(3C-2D)(C^2-2CD+4D^2)G - 2744(2C+D)G^3)V + (49(C-10D)(3C-2D) + 9604G^2)V^2 + 49G^2P^2(2CG+DG-7V)(CG - 3DG+7V) - 28GPV(CG-3DG+7V)((2C+D)(C+4D)G - 49CV), 2M-5P, 7d_1 - 3(2C+D)\rangle,$$

система (1) *имеет интегрирующий множитель* $\mu = f^{-7/3}$. $O(0,0)$ *системы* (1) *является центром.*

При выполнении условий теоремы 2 система (1) имеет интеграл Дарбу вида

$$H_1 = \frac{f^4}{h_1^3},$$

где $h_1(x,y) = 0$ — инвариантная кривая четвертой степени.

Теорема 3. *При* $p \in \mathbb{V}(I_2)$, *где*

$$I_2 = \langle 3d_3G - d_2V, 2d_2G + d_4(M-3P) - 2d_1V, (d_1G - 3V)V + d_4(3GP + (C-3D)V), 3V^2 - 3(d_4 - G)GP - (Cd_4 + 3D(G-d_4))V, V^2(2(C-3D)D - M + 3P) + 6G^2LV - G(2CP - D(M+9P)) \times V - 3G^2((M-P)P + 2QV), V^2(2(C-3D)D + 3(BG - GH + P)) - 9G^2P^2 - V^2M + 3G(5DP - CP + GQ)V, GQ(3GP + CV - 3DV) - V(V^2 + G(G+3H)P + (CH - D(G+3H))V), V^2 + 3G(G+H)P - (AG - CH + 3D(G+H))V, 9G^4P^2(V^2 - 9P^2) - V^4(3V^2 + (C-3D)^2 \times (6D^2 + 4AD - P) + 3B(C-3D)V) + 2V^2K(3GP + CV - 3DV)^2 + 3G^3PV(9BPV - 2V^2(A+3D) + 9P^2(2A - 2C + 11D)) + 3G^2V^2(3P^2(4A(C-4D) - C^2 - 45D^2 + 16CD + P) + V^2(3D^2 + 2AD + 2P) + 3B(C - 2A - 6D)PV) + 3V^3G(-2V^2(A+D) + (C-3D)P(5CD - 27D^2 + 2A(C-7D) + 2P) - B((C-3D)(2A+3D) + 3P)V), N - 3V\rangle,$$

система (1) *имеет инвариантную кубику вида* $g(x,y) = 0$, *где* $g(x,y) = 1 + d_1x + d_2x^2 + d_3x^3 + d_4y$.

Теорема 4. *При* $p \in \mathbb{V}(J_2)$, *где*

$$J_2 = I_2 + \langle 3B(4C-3D) + 20AG - 4(2C+D)G + 80V, G((6C-7D)(4C-3D)^2 - 300G^2(2C+D) + 300B(4C-3D)G) + 10(8C^2 + 27D^2 + 300G^2 - 42CD)V, 10GP + 2CV - 9DV, (2C+D) \times (8C^2 + 9D^2 + 80G^2 - 18CD)G + 2(8C^2 + 27D^2 - 400G^2 - 42CD)V\rangle,$$

система (1) *имеет интегрирующий множитель* $\mu = f^{-10/3}$. $O(0,0)$ *системы* (1) *является центром.*

При выполнении условий теоремы 4 система (1) имеет интеграл Дарбу вида

$$H_2 = \frac{g^7}{h_2^3},$$

где $h_2(x,y) = 0$ — инвариантная кривая седьмой степени.

Впервые первые интегралы вида $H_1(x,y)$ и $H_2(x,y)$ были получены Г. Жолондеком в [1].

Литература

1. Żołądek H. *Remarks on the classification of reversible cubic systems with center* // Topological Methods in Nonlinear Analysis. Journal of the Juliusz Schauder Center. 1996. V. 8. P. 335–342.